

P1) b) Calculemos $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \frac{(3n+2k)^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}^*$

Notar primero que $2 \sum_{k=1}^n \frac{(3n+2k)^p}{n^{p+1}} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(3n+2k)^p}{n^p} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3n}{n} + \frac{2k}{n} \right)^p$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2k}{n} \right)^p = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left(3 + \frac{2k}{n} \right)^p \quad (+1,0)$$

Esto es una suma de Riemann si es igual a: $\sum_{k=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y x_i el $(i+1)$ -ésimo pto. de la partición. Más aún, si

$P = P_{unif}(n) : \Delta x_i = \frac{(b-a)}{n} \cdot i + a \Rightarrow \Delta x_i = \frac{(b-a)}{n}$

y $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{(b-a)}{n} i + a\right) \cdot \frac{(b-a)}{n}$; en nuestro caso se

deduce entonces que: $\Delta x_i = \frac{2}{n} = \frac{b-a}{n} \Rightarrow b-a=2$

+1,0 por buenos a, b.

+0,4 por identificar f

$x_k = 3 + \frac{2k}{n} = \frac{(b-a)}{n} k + a \Rightarrow a=3 \Rightarrow b=5.$

$f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$ que es integ. por ser continua

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \frac{(3n+2k)^p}{n^{p+1}} \stackrel{\uparrow}{=} \int_3^5 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_3^5 = \frac{5^{p+1} - 3^{p+1}}{p+1} \quad (+0,3 \text{ por el } \cdot \text{cálculo final})$

integrable $\leftarrow (0,3 \text{ por este argum.})$

Total: $1,0 + 1,0 + 0,4 + 0,3 + 0,3 = 3,0$ pts.

P3 b) Dado $a > 0$, se pide calcular

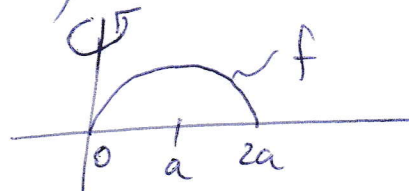
$$J = \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx - \int_{-2a}^{2a} x \sqrt{4a^2 - x^2} dx$$

Notar que la función $x \sqrt{4a^2 - x^2} = h(x)$ es impar:

$$h(-x) = -x \sqrt{4a^2 - (-x)^2} = -x \sqrt{4a^2 - x^2} = -h(x) \quad (+0,7 \text{ esta integral})$$

$$\text{luego: } \int_{-2a}^{2a} h(x) dx = 0 \quad (\text{\textcircled{+0,7} acepta conocido!})$$

Para la otra integral, notar que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi \int_0^{2a} 2x f(x) dx \right) \text{ con } f(x) = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Voy}(f) \end{aligned}$$


(+0,5) por notar esto!

Así, el Volumen asociado es LA MITAD DE UN TORO con $a = r = R$.

$$\Rightarrow \text{Voy}(f) = \frac{1}{2} V_{\text{toro } r=R=a} = \frac{1}{2} (2\pi^2 a^3) = \pi a^3$$

↑
AREA

$$\therefore \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx = \frac{1}{2\pi} (\pi^2 a^3) = \frac{\pi a^3}{2}$$

(+0,8 cálculo integ.
no mala y concluir.)
~~Extracción~~ conclusion.

$$\therefore J = \frac{\pi a^3}{2}$$

$$\text{Total: } 0,7 + 0,5 + 0,8 = 2,0. \checkmark$$

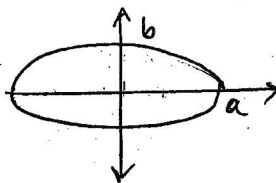
Obs. Si no notan esto, se debe hacer el CV: $x-a = a \sin \phi$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\Rightarrow J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a + a \sin \phi) a \cos \phi \cdot a \cos \phi d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos^2 \phi d\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \sin \phi \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi a^3}{2}$$

↑
= 0 impar por partes o ángulo doble.

P3) 9) $\mathcal{E}: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$\mathcal{E}_\lambda: \left(\frac{x}{\lambda a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda b}\right)^2 = 1$



a) Para calcular S debemos despejar y en la ecc. de la elipse y aprovechar simetrías

pues ~~entonces~~ $S = 4 \text{ Largo en } 1^{\text{er}} \text{ cuadrante.}$ (o $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$)

Así: $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \Rightarrow y = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ (En el 1^{er} cuadrante)

$x \in [0, a]$ $f(x)$ (+0,5 fn. a integrar)

o.o. $S = 4 \cdot \int_0^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$, calculemos $f'(x)$: $f'(x) = b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot -2 \left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{b}{a} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}}$

Luego: $S = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx$

~~$\neq 4 \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}}{a^2 - x^2} dx$~~

~~mejor no, pero
no podré calcular
fácilmente los λ~~

$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot a$

$= -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = f'(x)$

$= 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}} dx$

(+0,5 cálculo)

(+0,5 cálculo S) $f'(x)$

Análogamente: $S_\lambda = 4 \int_0^{\lambda a} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\lambda a}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{\lambda a}{x}\right)^2 - 1}} dx$

Sea $u = \frac{x}{\lambda}$
 $\Rightarrow du = \frac{1}{\lambda} dx$
 $\Rightarrow \lambda du = dx$

$= 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{a}{u}\right)^2 - 1}} \lambda du$

$= 4\lambda \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{a}{u}\right)^2 - 1}} du = \lambda \cdot S$

(+0,5) cálculo

S_λ y conclusión).

Total: $0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2 \checkmark$